§ 4. Непарадоксальность

В отношении S^1 имеет силу следующая метатеорема:

$MT1$. Если $x \vdash y$ есть теорема S^1 (доказуема в S^1), то в y не входят элементарные высказывания, которые не входят в x (или в y входят только такие элементарные высказывания, которые входят в x).

Доказательство $MT1$. Случай 1: $x \vdash y$ есть аксиома S^1. Легко убедиться путем пересмотра аксиомных схем S^1, что в y не входят элементарные высказывания, отсутствующие в x. Случай 2: $x \vdash y$ получена из $x \vdash z$ и $z \vdash y$ по правилу $R1$. Очевидно, что если в y не входят элементарные высказывания, отсутствующие в z, а в z не входят элементарные высказывания, отсутствующие в x, то в y не могут входить элементарные высказывания, отсутствующие в x. Случай 3: $x \vdash y$ имеет вид $x \vdash zv$ и получена из $x \vdash z$ и $x \vdash v$ по правилу $R2$. Очевидно, что в zv входят только такие элементарные высказывания, которые входят в z или (не исключающее «или») v. И если в z и в v не входят элементарные высказывания, отсутствующие в x; то в y точно также не могут входить элементарные высказывания, отсутствующие в x. Случай 4: y в $x \vdash y$ получено из x по правилу $R3$ путем замены вхождения z в x высказыванием v. Если $z \vdash v$ и $v \vdash z$ доказуемы, то множества элементарных высказываний, входящих в z и v, совпадают. Поэтому в y не могут оказаться элементарные высказывания, отсутствующие в x.

Из $MT1$ вытекают следующие метатеоремы:

$MT2$. Если $x \vdash y$ и $y \vdash x$ суть теоремы S^1, то множества элементарных высказываний, входящих в x и y, совпадают.

$MT3$. Формулы следования вида $x \vdash y{:}\sim y$, $\sim xx \vdash y$, $x \vdash \sim(\sim yy)$, $x \vdash y \supset x$, $x \vdash \sim x \supset y$; $x \vdash y \vee \sim y$ недоказуемы в S^1. Выражения вида $x \vdash (y \vdash x)$ и $x \vdash (\sim x \vdash y)$ не являются формулами следования, доказуемыми в S^1.

Согласно $MT3$ в S^1 исключаются следствия, подобные парадоксам материальной и сторогой импликации. Поэтому $MT1$ мы называем теоремой непарадоксальности, а систему S^1 непарадоксальной в смысле $MT1$.